

## CAPÍTULO 3

## LA DERIVADA

## 3.1 DEFINICIÓN

En el primer capítulo se estudió el concepto de límite y en el segundo la idea de incrementos. Uniendo estos dos conceptos se llega a la parte medular del contenido de cálculo diferencial, que es *la derivada*.

Para representar la derivada existen tres formas, la primera se llama notación de *Leibnitz* y es  $\frac{dy}{dx}$ , que se lee “la derivada de *ye* con respecto a *x*”, aunque abreviadamente suele decirse únicamente “la derivada de *ye*”. La segunda es la notación de *Lagrange* que es  $y'$ ; y finalmente la tercera es la notación debida a *Cauchy* que es  $D_x y$ . La que se empleará en este curso es la primera.

Se define la derivada como el límite, cuando  $\Delta x$  tiende a cero, del cociente de los incrementos  $\Delta y$  entre  $\Delta x$ , que en notación matemática se escribe como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Para explicar su significado, se empleará un ejemplo numérico. Sea  $y = x^2$ . Obteniendo el incremento  $\Delta y$  conforme lo visto en el capítulo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
 y &= x^2 \\
 y + \Delta y &= (x + \Delta x)^2 \\
 \Delta y &= (x + \Delta x)^2 - y \\
 \Delta y &= (x + \Delta x)^2 - x^2 \\
 \Delta y &= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 \\
 \Delta y &= 2x\Delta x + \Delta x^2
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Esta fórmula es la que se empleará en las siguiente tablas para obtener el valor del incremento  $\Delta y$  de la variable  $y$ , en donde debe tomarse en cuenta que  $x$  representa el valor inicial.

A continuación se elaborarán varias tablas, como se hizo en el capítulo I al explicar el concepto de límite, solamente que ahora contendrán tres filas para poder ver hacia dónde se acerca el cociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  cuando el incremento de  $x$  tiende a cero.

Dando un valor inicial arbitrario a la variable  $x$ , por ejemplo  $x = 4$ .

Entonces cuando el incremento de  $x$  es  $\Delta x = 0.1$ , el incremento  $\Delta y$  se obtiene empleando la fórmula (3.1):

$$\Delta y = 2(4)(0.1) + (0.1)^2 = 0.81$$

de la misma forma para cuando  $\Delta x = 0.01$

$$\Delta y = 2(4)(0.01) + (0.01)^2 = 0.0801$$

o para  $\Delta x = 0.001$ , cuyos valores se concentran en la siguiente tabla:

$\Delta x$	0.1	0.01	0.001	0.000000000001	etc.
$\Delta y$	0.81	0.0801	0.008001	0.000000000008000000000001	
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	8.1	8.01	8.001	8.000000000001	

Se ve que conforme  $\Delta x$  tiende a cero, por su parte el cociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  se aproxima a 8. Entonces

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8, \text{ para el valor inicial de } x = 4.$$

Repitiendo el proceso con un nuevo valor inicial, por ejemplo para  $x = 5$  :

$\Delta x$	0.1	0.01	0.001	0.000000000001	etc..
$\Delta y$	1.01	0.1001	0.010001	0.000000000010000000000001	
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	10.1	10.01	10.001	10.000000000001	

Se concluye que conforme  $\Delta x$  tiende a cero, por su parte el cociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  se aproxima a 10.

$$\text{Entonces } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 10, \text{ para el valor inicial de } x = 5.$$

Repitiendo el proceso con otro valor inicial, por ejemplo para  $x = 7$  :

$\Delta x$	0.1	0.01	0.001	0.000000000001	etc.
$\Delta y$	1.41	0.1401	0.014001	0.0000000001400000000001	
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	14.1	14.01	14.001	14.000000000001	

Se ve que conforme  $\Delta x$  tiende a cero, por su parte el cociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  se aproxima a 14. Entonces

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 14, \text{ para el valor inicial de } x = 7.$$

Se pueden sintetizar los resultados de las anteriores tablas de la manera siguiente:

<p>Para <math>x = 4</math>:</p> $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8$	<p>Para <math>x = 5</math>:</p> $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 10$	<p>Para <math>x = 7</math>:</p> $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 14$
---	--	--

En cada caso existe una regularidad: el cociente de los incrementos  $\Delta y$  entre  $\Delta x$  siempre tiende al doble del valor inicial de  $x$ , es decir, el límite siempre es el doble del valor de  $x$ , lo cual puede escribirse en términos genéricos como

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

y como este límite es la derivada de la función en cuestión (en este caso,  $y = x^2$ ), entonces

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

En resumen: la derivada de la función  $y = x^2$  es  $\frac{dy}{dx} = 2x$ .

### 3.2 DERIVADA POR INCREMENTOS

Dado que por definición  $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , otra forma de encontrar la derivada de una función es construyendo el cociente de los incrementos  $\Delta y$  entre  $\Delta x$  y calculando su límite cuando  $\Delta x$

tiende a cero, en donde el incremento  $\Delta y$  se obtiene aplicando la técnica estudiada en el capítulo anterior relativo a incrementos.

Para el caso particular de la función  $y = x^2$  del ejemplo tomado en el apartado 3.1, se calculó que el incremento de  $y$  es  $\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$  (ver página 36), de manera que aplicando la definición de derivada se llega a que

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x(0) + (0)^2}{0} = \frac{0}{0}\end{aligned}$$

Como da una forma indefinida, se aplica la técnica vista en el primer capítulo referente a límites, es decir, se debe factorizar, simplificar y volver a calcular el límite:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x} (2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x)\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

y como ese límite es la derivada, finalmente se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

**Ejemplo 1:** Calcular, por incrementos, la derivada de la función  $y = 3x^2 + x - 2$ .

**Solución:** Primero debe obtenerse el incremento  $\Delta y$ :

$$y = 3x^2 + x - 2$$

$$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - 2$$

$$\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - 2 - y$$

$$\Delta y = 3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + x + \Delta x - 2 - 3x^2 - x + 2$$

$$\Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + x + \Delta x - 2 - 3x^2 - x + 2$$

$$\Delta y = 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x$$

entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x}{\Delta x} \\ &= \frac{6x(0) + 3(0)^2 + (0)}{(0)} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Como se obtiene una forma indeterminada, hay que factorizar, simplificar y volver a calcular el límite en la fracción simplificada:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}(6x + 3\Delta x + 1)}{\cancel{\Delta x}} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x + 3\Delta x + 1) \\ &= 6x + 3(0) + 1 \\ &= 6x + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 1$$

**Ejemplo 2:** Calcular, por incrementos, la derivada de  $y = \frac{1}{x}$

**Solución:** Obteniendo primero el incremento  $\Delta y$ , conforme a las reglas vistas en el capítulo 2:

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - y$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}$$

$$\Delta y = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)}$$

$$\Delta y = \frac{-\Delta x}{x^2 + x\Delta x}$$

entonces

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\Delta x}{x^2 + x\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(x^2 + x\Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2 + x\Delta x}$$

$$= \frac{-1}{x^2 + x(0)}$$

$$= \frac{-1}{x^2}$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2}$$

**Ejemplo 3:** Obtener por incrementos la derivada de  $y = \frac{2x}{3x-1}$

**Solución:** Obteniendo primero el incremento  $\Delta y$ , conforme a las reglas vistas en el capítulo 2:



**EJERCICIO 3.1**

Obtener la derivada de las siguientes funciones por incrementos:

1)  $y = 4x^2$

3)  $y = x^2 - 7x - 8$

5)  $y = 4 - 3x$

7)  $y = 8x^3$

9)  $y = 2x^3 + 7x^2 - x$

11)  $y = \frac{1}{x}$

13)  $y = \frac{1}{x^2}$

15)  $y = \frac{4x}{x^2 - 8}$

2)  $y = 5x^2 + x$

4)  $y = 6x - 9$

6)  $y = 4x^2 + 6x - 11$

8)  $y = x^3 - x^2$

10)  $y = x^3 - 8x + 9$

12)  $y = \frac{x}{x-1}$

14)  $y = \frac{x^2}{3x-2}$

16)  $y = \frac{2x-7}{3x+6}$

LUIS CASTRO PÉREZ  
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ  
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ  
www.luiscastrop.com